Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
02.05.2007

Diskrete Optimierung II

3. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \in O(g) \quad :\Leftrightarrow \quad & \exists\, c > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \\ & f(n) \leq c \cdot g(n) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}f \text{ wächst höchstens so stark wie } g\text{“} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}g \text{ ist eine obere Schranke für } f.\text{“} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \in o(g) \quad :\Leftrightarrow \quad & \forall\, c > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \\ & 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}f \text{ wächst echt langsamer als } g\text{“} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}g \text{ ist eine echte obere Schranke für } f.\text{“} \end{aligned}$$

Für $f(n) = 2n^2 + 7n - 10$ und $g(n) = n^2$ ist beipielsweise $f(n) \in O(g(n))$, wenn man $c = 3$ und $n_0 = 5$ wählt.

Sortieren Sie die Funktionen (bzw. stellen Sie Unvergleichbarkeit fest)

$$n^2,\ \sqrt{n},\ n!,\ \log n,\ 2^n,\ n^n,\ n$$

nach aufsteigender Komplexität unter Verwendung der „Groß–Oh“– und „Klein–Oh“–Notation.

Aufgabe G2 In der Vorlesung haben wir *Zonotope* Z als Minkowskisumme von Streckenabschnitten definert:

$$Z = [p_1, q_1] + [p_2, q_2] + \cdots [p_k, q_k].$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, andere Darstellungsweisen von Zonotopen kennenzulernen.

(i) Zeigen Sie, dass ein Zonotop das Bild einer affinen Projektion des Einheitswürfels ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Zonotop zentralsymmetrisch ist und dass Seiten von Zonotopen wieder Zonotope sind.

(iii) Geben Sie ein Polytop an, dass kombinatorisch äquivalent zum Würfel (d.h. deren Seitenverbände sind gleich), jedoch kein Zonotop ist.

(iv) Betrachten Sie die folgende endliche Familie von linearen Hyperebenen:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}} := \{H_1, \ldots, H_p\} \in \mathbb{R}^d, \text{ wobei } H_i := \{x \in \mathbb{R}^d : v_i^T x = 0\}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Seitenverband des Zonotops $Z = [0, v_1] + [0, v_2] + \cdots [0, v_p]$ und Hyperebenenarrangement $\mathcal{A}_V$?

Hausübungen

Abgabe am 09.05.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

In der Aufgabe G3 vom letzten Übungsblatt haben wir gezeigt, dass je $d+1$ Ecken $x(t_{i_0}), \dots, x(t_{i_d})$ des zyklischen Polytopes $C_{d,n}$ affin unabhängig sind, d.h. es gibt keine affine Hyperebene im $\mathbb{R}^d$, die $d+1$ Ecken von $C_{d,n}$ enthält. Dies bedeutet insbesondere, dass $C_{d,n}$ simplizial ist, also jede Facette ein Simplex ist. Wir möchten nun gern wissen, wie die Facetten genau aussehen, also durch welche Ecken diese definiert werden.

Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$p : t \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & t^d \\ 1 & t_{i_1} & \cdots & t_{i_1}^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{i_d} & \cdots & t_{i_d}^d \end{pmatrix}.$$

(i) Überlegen Sie sich, dass p ein Polynom vom Grad d ist. Wieviele Nullstellen hat p?

(ii) Beschreiben Sie die Lage zweier Punkte $x(t), x(t') \in \mathbb{R}^d$ mit $p(t) \cdot p(t') < 0$ bezüglich der Hyperebene durch die Punkte $x(t_{i_0}), \dots, x(t_{i_d})$.

(iii) Zeigen Sie nun, dass $x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_d})$ genau dann eine Facette bilden, wenn $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_d\}, i < j$ gilt

$$2 \mid \#\{k | k \in \{i_1, \dots, i_d\}, i < k < j\}.$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Seien $N \subseteq \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei Polytope mit den Eckenmengen $\mathrm{V}(N)$ und $\mathrm{V}(M)$ sowie den Facettenmengen $\mathrm{F}(N)$ und $\mathrm{F}(M)$.

(i) Zeigen Sie, dass das (kartesische) Produkt $N \times M := \{(n, m) | n \in N, m \in M\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ wiederum ein Polytop ist.

(ii) Geben Sie die Ecken $\mathrm{V}(N \times M)$ und Facetten $\mathrm{F}(N \times M)$ von $N \times M$ an.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Gegeben sei ein zusammenhängender, ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht ist ein minimaler aufspannender Baum von G, d. h. eine Kantenmente $T \subseteq E$ mit $w(T) = \min_{S \subseteq E} w(S)$, wobei $G_T = (V, T)$ zusammenhängend und kreisfrei ist.

Formulieren Sie ein ganzzahliges Programm zur Modellierung dieses Problems.