Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
03.07.2007

Diskrete Optimierung II

12. Übung

Gruppenübungen

Das Grundprinzip lokaler Suchverfahren besteht darin, ausgehend von einer gegebenen Startlösung alle Lösungen in ihrer Nachbarschaft abzusuchen und von diesen die beste auszuwählen, also ein lokales Optimum zu bestimmen. Eine Nachbarschaft N für eine Problemklasse heißt *exakt*, falls für jede Instanz I dieser Problemklasse ein lokales Optimum bezüglich N_I auch global optimal für I ist.

Aufgabe G1 Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph. Analog zum 2-Austausch beim TSP-Problem (vgl. Beispiel 4.11 im Skript) läßt sich für die Menge F von zulässigen Touren von G die Nachbarschaft von $f \in F$

$$N_k(f) = \{g \in F \quad | \quad \begin{array}{l} g \text{ entsteht durch Ersetzen von } \leq k \\ \text{Kanten aus } f \text{ durch andere Kanten}\} \end{array}$$

definieren.

(i) Zeigen Sie, dass N_2 nicht exakt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $N_{|V(G)|}$ exakt ist.

Aufgabe G2 Betrachten Sie für $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n > 0$ das $0-1$–Knapsackproblem

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \text{ s.t. } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b, \quad x_i \in \{0, 1\}\}.$$

(i) Sei $\frac{w_1}{a_1} \geq \cdots \geq \frac{w_n}{a_n}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_1 + \cdots + a_k \leq b$ und $a_1 + \cdots + a_{k+1} > b$. Zeigen Sie, dass $x \in [0, 1]^n$ mit

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ (b - a_1 - \cdots - a_k)/a_{k+1} & \text{falls } i = k + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Optimallösung für das relaxierte $0 - 1$–Knapsackproblem darstellt.

(ii) Geben Sie mithilfe von (i) ein Branch-and-Bound-Verfahren für das $0-1$–Knapsackproblem an.

(iii) Berechnen Sie per Branch and Bound für $n = 7$, $b = 35$ und

Objekt i	Gewicht a_i	Wert w_i
1	3	12
2	4	12
3	3	9
4	3	15
5	15	90
6	13	26
7	16	112

eine Optimallösung für das $0-1$–Knapsackproblem.

Hausübungen

Abgabe am 10.07.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

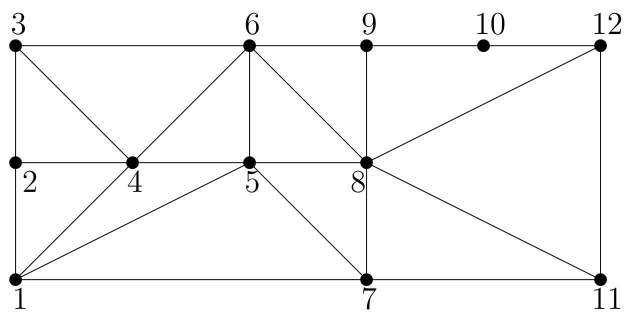
(i) Entwerfen Sie eine lokale Nachbarschaft für das Minimum-Spanning-Tree-Problem, die nicht exakt ist.

(ii) Entwerfen Sie eine lokale Nachbarschaft für das Minimum-Spanning-Tree-Problem, die exakt ist und analysieren Sie deren Größe.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Branch-and-Cut ist ein exaktes Verfahren zum Lösen von MIP's, in dem Branch-and-Bound und Schnittebenenverfahren kombiniert werden. Dabei werden die unteren Schranken während des Branch-and-Bound-Verfahren durch Schnittebenenverfahren bestimmt.

Betrachten Sie folgenden Graphen G:



Bestimmen Sie mittels Branch-and-Cut eine maximale stabile Menge in G. Stellen Sie dazu ein entsprechendes ganzzahliges lineares Programm auf. Verwenden Sie für die Schnittebenen die Ihnen bekannten gültigen Ungleichungen des Stabile-Mengen-Polytops und die folgende Branching-Regel: „Wähle eine Variable x_j, deren aktueller LP-Wert x_j^* nicht ganzzahlig ist und untersuche den Lösungsraum für $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ und $x_j \geq \lceil x_j^* \rceil$."