Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
24./25.05.2006

Diskrete Mathematik

6. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender Graph G genau dann einen Eulerpfad, d.h. einen nicht geschlossenen Eulerschen Weg, besitzt, wenn G genau zwei Knoten mit ungeradem Grad hat.

Aufgabe G2 Untersuchen Sie, welcher der Graphen der Platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) einen Eulerpfad(-kreis) und welcher einen Hamiltonpfad(-kreis) besitzt.

Bemerkung: Ein Hamiltonpfad in einem Graphen ist ein Pfad, der jeden Knoten des Graphen genau einmal benutzt.

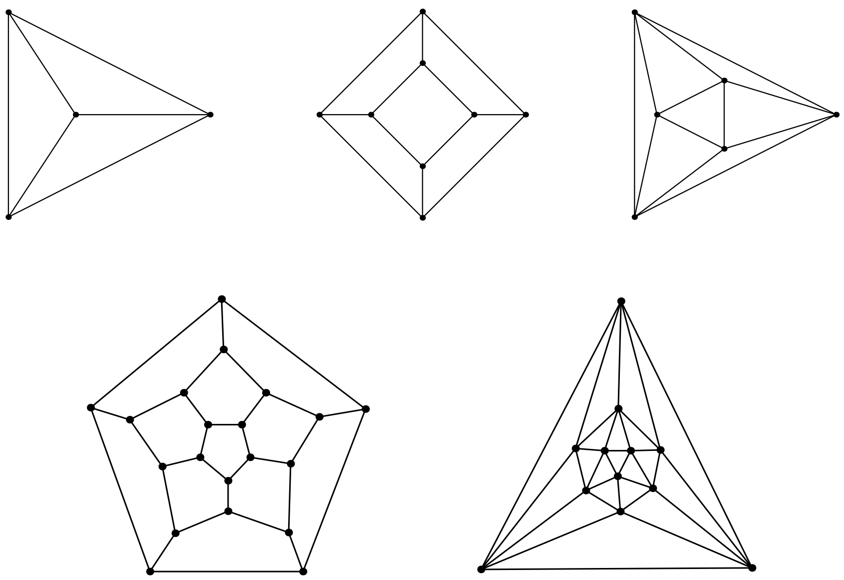


Abbildung 1: Graphen der Platonischen Körper

Aufgabe G3 Sei G ein Graph und v ein Blatt in G. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) G ist ein Baum.

(ii) $G - v$ ist ein Baum.

Aufgabe G4 Sei T ein Wurzelbaum mit Wurzel 0 und den Nichtwurzelknoten $1, 2, \ldots, n$. Eine *Inversion* von T sei ein Paar (i, j) von Knoten mit $i > j$ und der Eigenschaft, dass der eindeutige Weg von 0 zu j durch i verläuft. Wieviele solcher Bäume haben keine Inversionen?

Aufgabe G5 Seien $d_1, \ldots, d_n$ positive ganze Zahlen ($n \geq 2$). Zeigen Sie, dass genau dann ein Baum mit den Knotengraden $d_1, \ldots, d_n$ existiert, wenn gilt:

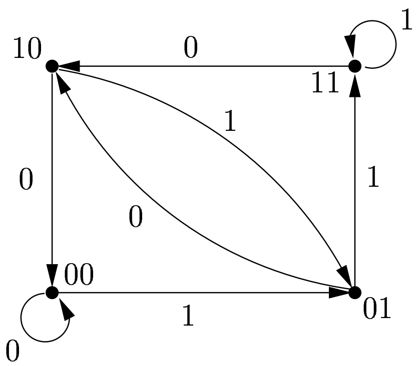
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Hausübungen

Abgabe am 31.05./02.06.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Eine *DeBruijn*–Sequenz der Ordnung k ist eine Folge von Nullen und Einsen, die jede mögliche 0-1-Folge der Länge k genau einmal enthält. Für $k = 2$ ist eine mögliche DeBruijn–Sequenz 01100.

(i) Bestimmen Sie eine DeBruijn–Sequenz der Ordnung 3. Betrachten Sie dazu folgenden Graphen:



(ii) Begründen Sie, warum für jedes $k \geq 2$ eine DeBruijn–Sequenz der Ordnung k existiert.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Sei G ein einfacher Graph mit m Kanten $e_1, \ldots, e_m$. Dann ist der *Kantengraph* $L(G)$ von G folgendermaßen definiert: $L(G)$ hat m Knoten $v_1, \ldots, v_m$ und (v_i, v_j) ist genau dann eine Kante von $L(G)$, wenn die beiden Kanten e_i und e_j zu einem Knoten v aus G inzident sind.

(i) Zeigen Sie, dass $L(K_5)$ das Komplement des Petersen–Graphen ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Kantengraph eines einfachen Eulerschen Graphen wieder Eulersch ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Ein abnehmender binärer Baum ist ein binärer Baum mit der Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und Wurzel n, in dem jeder Knoten null, ein oder zwei Kinder hat und jedes Kind kleiner ist als sein Vater. Beweisen Sie, dass die Anzahl a_n der abnehmenden binären Bäume mit n Knoten $n!$ ist.

Aufgabe H4 (5 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $T = (V, E)$ ein Baum und sei p_i die Anzahl der Knoten mit Grad i. Dann gilt: $p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \cdots + (n-3)p_{n-1} = p_1 - 2$.