Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
03.05.2006

Diskrete Mathematik

3. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Wieviele ganzzahlige Lösungen besitzt die Gleichung $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, wenn

(i) $x_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, k$ gelten muss?

(ii) $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 5$ und $x_i \geq 0$ für $i = 4, \ldots, k$ gelten muss?

Aufgabe G2 Bestimmen Sie die untere Schranke $e(n/e)^n \leq n!$.

Aufgabe G3 Beweisen Sie die Formel

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \; (n, r \in \mathbb{N})$$

sowohl durch Induktion über n (für beliebiges, aber festes r) als auch kombinatorisch.

Aufgabe G4 Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$ und $\sum_{i=1}^{n} i^2$ unter Verwendung von Aufgabe G3 und anschließend die Summe $\sum_{i=1}^{n} i^3$.

Hausübungen

Abgabe am 10.05.2006

Aufgabe H1 Wieviele ganzzahlige Lösungen besitzt die Gleichung $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, wenn $5 < x_1 < 10$ und $x_i \geq 2$ für $i = 2, \ldots, k$ gelten muss?

Aufgabe H2 Ein zwei Meter breiter Weg der Länge n soll mit Pflastersteinen der Größe 1×2 Meter belegt werden. Dabei dürfen keine leeren Felder übrig bleiben. Sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten von (zulässigen) Pflasterungen eines Weges der Länge n. Stellen Sie eine Rekursion für a_n auf.

Aufgabe H3 Sei $k \geq 1$ fest und $f_k(n)$ die Anzahl der Permutationen auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ ohne Zykel der Länge k? Bestimmen Sie $f_k(n)$ und berechnen Sie anschließend $\lim_{n\to\infty} \frac{f_k(n)}{n!}$.

Aufgabe H4

(i) Sei $\pi \in \mathrm{Sym}(3)$ und P_π eine 3×3 Permutationsmatrix, d.h. $(P_\pi)_{i,j} = \delta_{\pi(i),j}$. Seien α_π ganze Zahlen mit $\sum_\pi \alpha_\pi P_\pi = 0$. Zeigen Sie, dass $\alpha_{123} = \alpha_{312} = \alpha_{231} = -\alpha_{213} = -\alpha_{321} = -\alpha_{132}$.

(ii) Sei $H_3(r)$ die Anzahl der 3×3 Matrizen über $\mathbb{N}$, für die jede Spalten- und Zeilensumme r beträgt. Angenommen, Sie wissen, dass jede solche Matrix A als Summe von Permutationsmatrizen dargestellt werden kann. Zeigen Sie damit, dass

$$H_3(r) = \binom{r+5}{5} - \binom{r+2}{5}.$$