



# Diskrete Mathematik

## 14. Übung

### Gruppenübungen

Ein Sudoku-Rätsel wird repräsentiert durch ein  $9 \times 9$ -Gitter, welches aus neun  $3 \times 3$ -Teilgittern bzw. Boxen besteht, in denen bereits wie in folgender Abbildung einige Felder Einträge zwischen 1 und 9 besitzen. Das Ziel ist es, den restlichen Feldern des Gitters so die Zahlen 1 bis 9 zuzuordnen, dass jede Zeile, jede Spalte sowie jede Box jede Zahl genau einmal enthält.

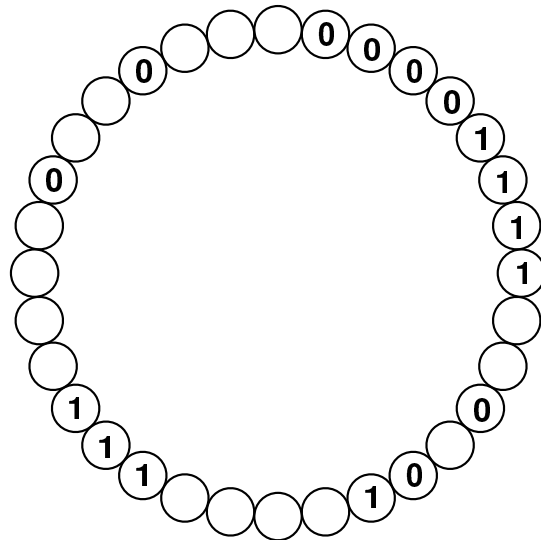
		4		3				5
	8			7	4			6
		9				2		
				9		1		4
8	2						7	9
4		1		5				
		8				7		
5			3	1			2	
2				8		9		

**Aufgabe G1** Lösen Sie folgenden Varianten des Sudoku:

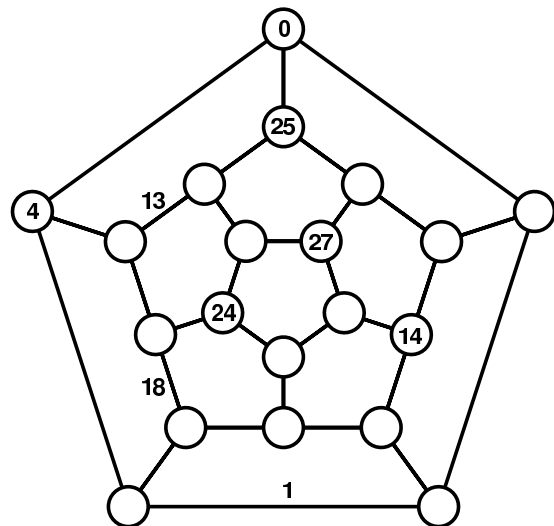
In diesem Rätsel müssen Sie ein *Lateinisches Tableau* vervollständigen: jede Zeile muss eine Permutation der Zahlen 1 bis  $r$  enthalten, wobei  $r$  die Breite der entsprechenden Zeile ist, und jede Spalte muss eine Permutation der Zahlen 1 bis  $c$ , wobei  $c$  die Höhe der entsprechenden Spalte ist.

			6				5		
	7								2
		9				1			
8					3	6			
4									
					5				
	3								
		1							

In diesem Rätsel müssen Sie eine *De Bruijn*-Sequenz der Ordnung 5 vervollständigen: jede mögliche 0-1-Folge der Länge 5 muss im Uhrzeigersinn genau einmal in diesem Zykel vorhanden sein, wobei zwei solcher Folgen überlappen dürfen.



In diesem Rätsel müssen Sie eine *anmutige* Markierung eines Graphen finden: jeder Knoten des Graphen ist mit einer nichtnegativen ganzen Zahl zwischen 0 und  $m$ , der Anzahl der Kanten des Graphen, markiert, wobei jede Zahl maximal einmal verwendet werden darf. Jede Kante wird mit der Differenz der Label ihrer Endknoten versehen. Dabei muss jede Zahl  $1, \dots, m$  genau einmal vorkommen.



**Aufgabe G2** Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Anzahl bzw. der angenäherten Anzahl aller möglichen Sudoku-Gitter, d.h. wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Sudoku-Gitter zu vervollständigen, so dass jede Zeile, Spalte und  $3 \times 3$ -Box die Zahlen 1 bis 9 genau einmal enthält.

- (i) Wieviele Gitter gibt es, bei denen die Block-, die Zeilen- und die Spaltenregel außer acht gelassen wird?
- (ii) Wieviele Gitter gibt es, bei denen die Zeilen- und die Spaltenregel außer acht gelassen wird?
- (iii) Wieviele Gitter gibt es, bei denen die Spaltenregel außer acht gelassen wird?
- (iv) Wieviele Gitter gibt es, wenn wir nun annehmen, dass die Zeilen- und die Spaltenregel unabhängig voneinander sind und die Hinzunahme der Spaltenregel die Anzahl der zulässigen Gitter um den gleichen Faktor wie die Zeilenregel reduziert?

Ihr Ergebnis sollte ungefähr  $6,6571 \cdot 10^{21}$  betragen, welches von der tatsächlichen Anzahl zulässiger Sudoku-Gitter  $6.670.903.752.021.072.936.960 \approx 6,671 \cdot 10^{21}$  nur um 0,2 Prozent abweicht.

**Aufgabe G3** Formulieren Sie das Sudoku-Problem als SAT-Problem (vgl. 10. Übung, Aufgabe G1). Wieviele Variablen und Klauseln werden benötigt?