Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
12./13.07.2006

Diskrete Mathematik

13. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Drücken Sie die Funktionen

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\\ \arcsin(x) &= x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot x^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}+\cdots\end{aligned}$$

in Form von hypergeometrischen Reihen aus.

Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Funktion `Sumtohyper` des `Maple`–Pakets `hsum`, dass Sie von der Internetseite

`http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Publikationen/`

herunterladen können.

Dabei liefert `Sumtohyper(f,k)` die hypergeometrische Repräsentation von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k$.

Aufgabe G2 Schreiben Sie die folgenden Identitäten der *Legendre–Polynome* in Form von hypergeometrischen Reihen.

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{-n-1}{k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}.\end{aligned}$$

Woran erkennt man jeweils in der hypergeometrischen Schreibweise die obere Grenze der entsprechenden Summe?

Aufgabe G3 Berechnen Sie mithilfe des Algorithmus von Gosper

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}k^3$$

und

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}.$$

Der Algorithmus von Gosper ist unten noch einmal zusammengefasst. Im zweiten Schritt stellt sich das Problem, welchen Grad das Polynom $s(k)$ hat. Wenn wir den Grad d von $s(k)$ kennen, können wir die Koeffizienten von $s(k) = \alpha_d k^d + \alpha_{d-1} k^{d-1} + \cdots + \alpha_0$ per Koeffizientenvergleich in der rekursiven Gleichung $p(k) = q(k)s(k+1) - r(k)s(k)$ berechnen. Um den Grad von $s(k)$ herauszufinden, reicht es jedoch die Grade der Funktionen $q(k), r(k), p(k)$ zu betrachten.

Input : $t(k)$, ein hypergeometrischer Term

Output: Hypergeometrischer Term $T(k)$, so dass $t(k) = T(k+1) - T(k)$.

1 Berechne $q(k), r(k), p(k) \in \mathbb{C}[k]$ mit
$\frac{t(k+1)}{t(k)} = \frac{p(k+1) \cdot q(k)}{p(k) \cdot r(k+1)}$ und
ggt$(q(k), r(k+j)) = 1$ für alle $j \geq 1$.

2 Finde $s(k) \in \mathbb{C}[k]$ mit $p(k) = q(k)s(k+1) - r(k)s(k)$.

if *Solch ein* $s(k)$ *existiert* **then**

  return $T(k) = \frac{r(k)s(k)t(k)}{p(k)}$

Algorithmus 1: Gosper–Algorithmus

Kontrollieren Sie ihr Ergebnis mithilfe der `Maple`–Funktion `gosper` von `hsum`, wobei `gosper(t(k),k)` eine Antidifferenz $T(k)$ mit $t(k) = T(k+1) - T(k)$ berechnet, falls diese existert.