Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2006
05./06.07.2006

Diskrete Mathematik

12. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Mithilfe von erzeugenden Funktionen lassen sich Rekursionen mit konstanten Koeffizienten lösen.

Betrachten Sie die Fibonacci–Folge $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n = 1]$. Interpretiert man diese Gleichung mithilfe von erzeugenden Funktionen, erhält man

$$F(z) = \sum F_n z^n = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n + \sum [n = 1] z^n = zF(z) + z^2 F(z) + z.$$

Die Lösung dieser Gleichung in $F(z)$ ist

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}. \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie Konstanten A, B, α, β, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z}.$$

(ii) Fassen Sie die rechte Seite von (1) als formale Reihe auf und schlussfolgern Sie, dass

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Aufgabe G2 Lösen Sie die folgende Rekursion mittels erzeugender Funktionen:

$$2h_n = 5h_{n-1} - h_{n-2} - 2h_{n-3}$$
$$h_0 = -\frac{5}{4}, h_1 = -\frac{21}{8}, h_2 = -\frac{71}{16}.$$

Aufgabe G3 Wieviele Möglichkeiten a_n gibt es, einen Stock der Länge n Meter in Teile der Länge von einem Meter zu zerbrechen, wenn in jedem Schritt alle dabei vorhanden Teile der Länge größer als 1 Meter in zwei Teile ganzzahliger Länge zerbrochen werden? Lösen Sie die Rekursion mittels erzeugender Funktionen und betrachten Sie dabei die quadrierte erzeugende Funktion.

Hausübungen

Die Letzten! - Abgabe am 12./13.07.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die binomische Reihe

$$\sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} z^k$$

für $r, z \in \mathbb{C}$ und $|z| < 1$ absolut konvergiert.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Bezeichne h_n die Anzahl aller $1 \times n$-„Schachbretter", deren Felder mit den Farben Rot, Grün und Blau gefärbt sind, so dass jedes Nachbarfeld direkt zur Linken eines roten Feldes niemals rot oder grün ist.

(i) Verifizieren Sie folgende rekursive Beschreibung der Zahlenfolge h_n:

$$\begin{aligned} h_n &= 2h_{n-1} + h_{n-2} \text{ für } n \geq 2, \\ h_0 &= 1, \\ h_1 &= 3. \end{aligned}$$

(ii) Lösen Sie die Rekursion mittels erzeugender Funktionen.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ heiße zulässig, wenn die Anzahl seiner Buchstaben 0 eine gerade Anzahl ist. Stellen Sie eine Rekursion für die Anzahl a_n der zulässigen Wörter der Länge n auf?

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Sei n eine positive ganze Zahl. Auf einer Kreislinie seien $2n$ verschiedene Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ gewählt. Bestimmen Sie die Anzahl c_n aller verschiedener Möglichkeiten, n Sehnen im Kreis derart zu zeichnen, dass ihre Endpunkte genau die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ sind und sich keine zwei dieser Sehnen schneiden.

Zwei Möglichkeiten gelten als verschieden, wenn es mindestens eine Sehne gibt, die bei der ersten Möglichkeit mindestens einen anderen Endpunkt als bei der zweiten Möglichkeit hat. Für $n = 3$ gibt es genau 5 solcher Möglichkeiten: