Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2005
28. Juni 2005

5. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Hausübung
(Abgabe bis zum 12.07.2005)

Aufgabe H1 (Größter gemeinsamer Teiler von Polynomen)

(a) Sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring der Polynome über K in einer Unbestimmten. Zeigen Sie: Seien $f_1, \ldots, f_m \in K[x]$ $(m \geq 2)$, dann existiert $GCD(f_1, \ldots, f_m)$ und ist eindeutig bis auf skalare Vielfache bestimmt.

Verwenden Sie dabei folgende Eigenschaft von $K[x]$: Für jedes Ideal I von $K[x]$, existiert ein $f \in K[x]$, so dass $I = \langle f \rangle$.

(b) Benutzen Sie `Maple`, `Mathematica` oder `Singular`, um die *GCDs* der folgenden rationalen Polynome zu berechnen:

- $GCD(x^4 + x^2 + 1, x^4 - x^2 - 2x - 1, x^3 - 1)$
- $GCD(x^3 + 2x^2 - x - 2, x^3 - 2x^2 - x + 2, x^3 - x^2 - 4x + 4)$

(c) Überprüfen Sie, ob $x^2 - 4 \in \langle x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2 \rangle$.

Aufgabe H2 (Monomordnung)

(a) Schreiben Sie folgende Polynome um, indem Sie die Monome entsprechend der Ordnungen *lex* und *grevlex* neu sortieren.

- $2x + 3y + z + x^2 - z^2 + x^3$,
- $2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$.

(b) Zeigen Sie, dass *grevlex* eine Monomordnung ist.

Aufgabe H3 (Gröbner–Basen in Abhängigkeit von der Monomordnung)

Berechnen Sie mithilfe eines Computeralgebra–Systems Ihrer Wahl eine Gröbner–Basis von

- $I_1 := \langle x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^2 + z^2 - 1 \rangle$ bezüglich der Monomordnung *grevlex* mit $x > y > z$,
- I_1 bezüglich der Monomordnung *lex* mit $x > y > z$,
- $I_2 := \langle x^5 + y^4 + z^3 - 1, x^3 + y^3 + z^2 - 1 \rangle$ bezüglich der Monomordnung *grevlex* mit $x > y > z$,
- I_2 bezüglich der Monomordnung *lex* mit $x > y > z$.

Aufgabe H4 (Gröbner–Basis)

Betrachten Sie die Polynome

$$x^{n+1} - yz^{n-1}w, xy^{n-1} - z^n, x^n z - y^n w$$

für $n \in \mathbb{N}$. Teo Mora hat in [2] gezeigt, dass die (reduzierte) Gröbner–Basis bezüglich der Monomordnung *grevlex* mit $x > y > z > w$ das Polynom $z^{n^2+1} - y^{n^2} w$ enthält. Überprüfen Sie dessen Gültigkeit für $n = 2, \ldots, 5$. Welche Kardinalität haben die Gröbner–Basen?

*

Literatur

[1] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties, and algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.

[2] D. Lazard. Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations. In *Computer algebra (London, 1983)*, volume 162 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 146–156. Springer, Berlin, 1983.