Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2005
26. April 2005

1. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Hausübung

Aufgabe H1 (Zweierkomplement)

Sei $x = (x_{n-1}, \ldots, x_0)_2$ eine n–stellige binäre Zahl. Das Einer–Komplement $K_1(x)$ von x erhält man, indem man stellenweise das „Komplement“ $1 - x_i$ zu x_i bildet, z. B. ist $K_1((10110)_2) = (01001)_2$. Das Zweier–Komplement $K_2(x)$ von x erhält man, indem man $K_1(x)$ bildet und dazu 1 addiert, z. B. ist $K_2((10110)_2) = (01001)_2 + (1)_2$.

Komplemente lassen sich wie folgt zur Darstellung ganzer Zahlen verwenden. Sei n wiederum die zur Verfügung stehende Wortlänge. Dann ist der darstellbare Bereich gegeben durch $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$. Zahlen aus diesem Bereich werden folgendermaßen dargestellt:

- nicht–negative Zahlen durch ihre binäre Darstellung,
- negative Zahlen x durch das Zweier–Komplement ihres Betrages $|x|$.

Bezeichnen wir mit $(x)_{K_2} = (x_{n-1}, \ldots, x_0)_{K_2}$ die Ziffern von x in der Zweier–Komplement–Darstellung, so gilt also:

$$(x)_{K_2} = \begin{cases} (x)_b & : \quad x \geq 0, \\ (K_2(|x|))_2 & : \quad x < 0. \end{cases}$$

Zwei n–stellige binäre Zahlen in Zweier–Komplement–Darstellung werden wie zwei Binärzahlen addiert, wobei ein eventueller Übertrag auf die $n+1$–Stelle in der Darstellung des Ergebnisses verloren geht, also modulo 2^n gerechnet wird. Die Subtraktion zweier Zahlen in der Zweier–Komplement–Darstellung wird zurückgeführt auf $x - y = x + (-y)$.

Aufgabe:

(a) Zeige: Für jede n–stellige binäre Zahl x gilt $x + K_2(x) = 2^n$.

(b) Was passiert, wenn man

$$144 + 121, \quad -20 - 128$$

binär im Zweier–Komplement mit $n = 8$ berechnet? Stellen Sie die angegebenen Dezimalzahlen als Zweier–Komplement dar und geben Sie die Ergebnisse sowohl dezimal als auch als Zweier–Komplement an.

Aufgabe H2 (Projektive Ebene)

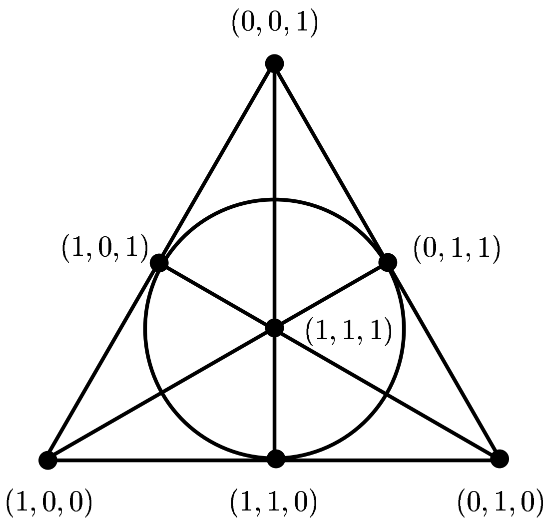
Sei V_q^3 für eine Primzahl q der 3–dimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Wir definieren die Inzidenzstruktur $P(V_q^3)$ wie folgt:

Die *Punkte* von $P(V_q^3)$ sind die eindimensionalen Unterräume von V_q^3,
die *Geraden* von $P(V_q^3)$ sind die zweidimensionalen Unterräume von V_q^3,
die *Inzidenz* von $P(V_q^3)$ ist das mengentheoretische Enthaltensein.

Dann ist $P(V_q^3)$ eine projektive Ebene, d. h. sie erfüllt folgende Eigenschaften:

(a) Für je zwei Punkte existiert genau eine Gerade, die inzident zu beiden ist.
(b) Für je zwei Geraden existiert genau ein Punkt, der inzident zu beiden ist.
(c) Es gibt vier Punkte, so dass keine Gerade inzident zu mehr als zwei dieser Punkte ist.

Für $q = 2$ ist eine projektive Ebene die sogenannte *Fano*–Ebene:



Die *Inzidenzmatrix* I einer projektiven Ebene ist eine $\{0, 1\}$–Matrix mit einer Zeile pro Gerade und einer Spalte pro Punkt der projektiven Ebene, so dass für einen Punkt j und eine Gerade i der Eintrag I_{ij} genau dann 1 ist, wenn i und j inzident sind. Die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten beträgt jeweils $q^2 + q + 1$.

Beispielsweise ist eine mögliche Inzidenzmatrix für die Fano–Ebene gegeben durch

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alle anderen entstehen durch Umordnen der Zeilen oder Spalten.

Aufgabe:

(a) Geben Sie ein Verfahren an, mit der eine Inzidenzmatrix für eine projektive Ebene $P(V_q^3)$ für jede Primzahl $q \geq 2$ konstruiert werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass in jeder Spalte und in jeder Zeile einer Inzidenzmatrix genau $q + 1$ Einsen auftreten.

(c) Berechnen Sie mithilfe von Octave, Maple oder Mathematica die Determinanten der Inzidenzmatrizen der projektiven Ebenen für $q = 2, 3, 5, 7$.

(d*) Bestimmen Sie die Determinante der Inzidenzmatrizen für jede beliebige Primzahl $q \geq 2$.