Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
13.06.2007

Diskrete Optimierung II

9. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit $|V| = n$ Knoten und Kantengewichten c_{ij} für $1 \leq i < j \leq n$. Wir betrachten das folgende ganzzahlige Programm, welches eine Formulierung für das symmetrische Traveling Salesman-Problem (TSP) auf G ist:

$$\min \quad \sum_{i<j} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, \quad i = 1, ..., n \tag{2}$$

$$\sum_{i<j} x_{ij} = n \tag{3}$$

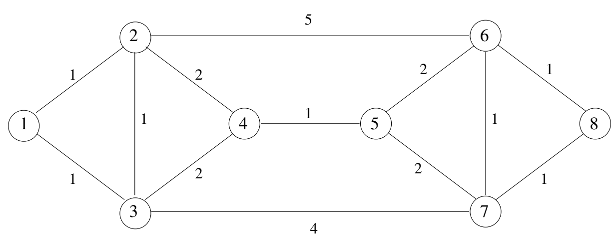
$$\sum_{(i,j)\in\gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall\, S \subseteq V \backslash \{1\},\ |S| \geq 3 \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall\, i, j = 1, ..., n,\ i \neq j. \tag{5}$$

(i) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung bzgl. der Nebenbedingungen (2) für $i = 2, ..., n$ an.

(ii) Welche Eigenschaften haben die zulässigen Lösungen des relaxierten Problems im Vergleich zu einer Tour?

(iii) Bestimmen Sie die Optimallösung des relaxierten TSP zu $\lambda = 0$ für folgenden Graphen G:



Aufgabe G2 Gegeben sei das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (P):

$$\begin{array}{llllll}
\min & 4 & -2x_1 & -x_2 & & \\
\text{s. t.} & & & & & \\
(1) & & 3x_1 & +4x_2 & \leq & 6 \\
(2) & & x_1, & x_2 & \in & \{0, 1\}.
\end{array}$$

(i) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung von (P) bzgl. der Nebenbedingungen (1) an.

(ii) Skizzieren Sie $L(\lambda)$, und lesen Sie die Optimallösung der Lagrange-Relaxierung aus der Skizze ab.

(iii) Ermitteln Sie die Optimallösung von (P), und vergleichen Sie den Zielfunktionswert mit dem Optimalwert der Lagrange-Relaxierung.

Hausübungen

Abgabe am 20.06.2007

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Wir betrachten nochmals die Lagrange-Funktion für das TSP aus Aufgabe G1:

$$\begin{array}{rlll}
L(\lambda) = & \min & \sum_{i<j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j\neq i} x_{ij} - 2 \right) & & (1) \\
& \text{s. t.} & \sum_j x_{1j} = 2 & & (2) \\
& & \sum_{i<j} x_{ij} = n & & (3) \\
& & \sum_{(i,j)\in\gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S| - 1 & \forall\, S \subseteq V\backslash\{1\},\ |S| \geq 3 & (4) \\
& & x_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, i,j = 1,...,n,\ i \neq j. & (5)
\end{array}$$

Die Kantenmengen, deren Inzidenzvektoren zulässig für dieses Problem sind, werden *1-Bäume* genannt.

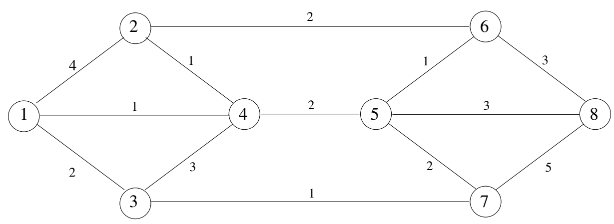
(i) Bringen Sie (1) in eine Form, die es erlaubt, die Berechnung von $L(\lambda)$ auf die Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes zurückzuführen. Modifizieren Sie dazu die Kantengewichte c geeignet.

(ii) Geben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes in einem ungerichteten Graphen mit nicht-negativen Kantengewichten an. Wie kann dieser Algorithmus zur Berechnung von $L(\lambda)$ (zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}^n$) verwendet werden?

(iii) Geben Sie zu $\lambda \in \mathbb{R}^n$ einen Subgradienten von $L(\lambda)$ an. Verwenden Sie hierzu die Ergebnisse aus (i) und (ii).

(iv) Geben Sie ein Subgradientenverfahren für das TSP-Problem mithilfe von 1-Bäumen an.

(v) Wenden Sie den Algorithmus aus (iv) auf folgenden Graphen an:



Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei $G = (V,E)$ ein vollständiger ungerichteter Graph und $c : E \to \mathbb{R}_+$ eine Kostenfunktion, die die Dreiecksungleichung erfüllt, d.h. $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}\ \forall i,j,k \in V$. Geben Sie einen polynomiellen Algorithmus an, der eine zulässige TSP-Tour für G ermittelt und dessen Lösung bezüglich c höchstens zweimal so schlecht wie die optimale TSP-Tour des Graphen ist.
Hinweis: Betrachten Sie minimal spannende Bäume.