Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
16.05.2007

Diskrete Optimierung II

5. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Zeigen Sie:

(i) A ist genau denn total unimodular, wenn $[A, I]$ unimodular ist.

(ii) A ist genau denn total unimodular, wenn $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{bmatrix}$ total unimodular ist.

(iii) A ist genau denn total unimodular, wenn A^T total unimodular ist.

Aufgabe G2

Gegeben sei das Polyeder

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Ist Ihr System eine minimale Beschreibung von P?

Hausübungen

Abgabe am 23.05.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Hermitesche Normalform A' der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die entsprechende Matrix U mit $A \cdot U = A'$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Hermitesche Normalform einer Matrix eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Seien $[B, 0]$ und $[B', 0]$ zwei verschiedene Hermitesche Normalformen der Matrix A. Sei i minimal mit $b_{ij} \neq b'_{ij}$ für ein j. Betrachten Sie nun den Gittervektor $b_{.j} - b'_{.j}$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Zeigen Sie folgendes hinreichendes Kriterium für totale Unimodularität:
Eine Matrix $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$ ist total unimodular, falls

- höchstens zwei Einträge in jeder Spalte ungleich 0 sind,
- die Zeilen können in zwei disjunkte Mengen I_1, I_2 aufgeteilt werden mit
  1. Hat eine Spalte zwei Einträge mit gleichen Vorzeichen, so liegen die entsprechenden Zeilen in verschiedenen I_j.
  2. Hat eine Spalte zwei Einträge mit verschiedenen Vorzeichen, so liegen die entsprechenden Zeilen in gleichen I_j.

Folgern Sie, dass die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix A eines gerichteten Graphen $G(V, E)$, d. h. $A = (a_{ij})_{i \in V, j \in E}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i,j) \in E, \\ -1, & \text{falls } (j,i) \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

total unimodular ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationaler, polyedrischer und spitzer Kegel und sei $H(C)$ die eindeutige minimale (ganzzahlige) Hilbertbasis des Kegels C. Weiterhin sei $F \subseteq C$ eine nichtleere Seitenfläche des Kegels C.

Zeigen Sie: $H(F) := F \cap H(C)$ ist die eindeutige minimale (ganzzahlige) Hilbertbasis von F.