Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
09.05.2007

Diskrete Optimierung II

4. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Beweisen Sie:

Für S, $S_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $(i \in \{1, ..., k\})$ gilt:

(i) $S_i \subseteq S_j \Rightarrow {S_j}^\circ \subseteq {S_i}^\circ$.

(ii) $S \subseteq S^{\circ\circ}$.

(iii) $\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^{k} {S_i}^\circ$.

(iv) $S^\circ = \operatorname{cone}(S^\circ) = (\operatorname{cone}(S))^\circ$.

(v) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $S = S^{\circ\circ\circ}$?

(vi) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $S = S^\circ$?

Aufgabe G2 Betrachten Sie folgendes Entscheidungsproblem:

STABLE SET	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ ungerichtet, Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Frage:	Hat G eine stabile Menge (d.h. keine zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden) der Größe k?

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass STABLE SET $\mathcal{NP}$–vollständig ist, indem das aus der Vorlesung bekannte Entscheidungsproblem SAT auf STABLE SET reduziert wird.

(i) Zeigen Sie: STABLE SET $\in \mathcal{NP}$, d.h. geben Sie ein Zertifikat für eine Ja-Instanz an.

(ii) Betrachten Sie folgende Instanz I von SAT: m Klausen $Z_1, \ldots, Z_m$ mit $Z_i = y_{i_1} \vee \ldots \vee y_{i_{k_i}}$ mit Literalen y_{i_j} in Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Konstruieren Sie (in polynomialer Zeit) einen Graphen G zu I und $k \in \mathbb{N}$, der genau dann eine stabile Menge der Größe k besitzt, wenn es für I eine erfüllende Belegung gibt.

Hausübungen

Abgabe am 16.05.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Eine Menge $S \subseteq C$ heißt *Erzeugendensystem* für C, falls $\text{cone}(S) = C$. Ist S minimal (bzgl. Mengeninklusion), so heißt S *Kegelbasis*.

(i) Geben Sie zwei Kegelbasen des $\mathbb{R}^2$ unterschiedlicher Kardinalität an.

(ii) Zeigen Sie: Eine Menge S ist genau dann eine Kegelbasis für einen Kegel C, wenn $\text{cone}(S) = C$ und $\forall s \in S : s \notin \text{cone}(S \setminus \{s\})$ gilt.

(iii) Gibt es im $\mathbb{R}^n$ Kegel mit Kegelbasen unendlicher Kardinalität?

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Wie reduziert man Probleme der Form

$$\text{Finde } x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0, A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m$$

auf Probleme der Form

$$\text{Finde } x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0, A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m?$$

Wie wirkt sich die Reduktion auf die Kodierungslänge der betrachteten Probleme aus?

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei $X = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}$ mit $a_i \geq 0 \, \forall i$, $b \geq 0$, dann nennen wir $P = \text{conv}(X)$ das *0-1–Knapsack–Polytop*.

(i) Bestimmen Sie für $n = 3$ die Ecken und Facetten des 0–1–Knapsack–Polytopes für $a_1 = 7, a_2 = 5, a_3 = 4$ und $b = 10$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Dimension von P

$$\dim(P) = n - |\{j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_j > b\}|$$

ist.

(iii) Wann ist eine Ungleichung $x_j \leq 1$ facettendefinierend für P?