Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
20.06.2007

Diskrete Optimierung II

10. Übung

Gruppenübungen

Betrachten Sie für $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ mit $m_1 + m_2 = m$ folgendes ganzzahlige Programm:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & A_1 x \leq b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \in \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{MIP}$$

Aufgabe G1 Zeigen Sie, dass die Lagrange-Relaxierung von (MIP) und die Dantzig-Wolfe-Dekomposition von (MIP) dieselbe (untere) Schranke für (MIP) berechnen.

In Bender's Dekompositionsverfahren werden zwei verschiedene lineare Programme gelöst. Das Master-Problem hat die Form:

$$\begin{aligned} \min \quad & z & & \\ -z \leq \; & c_1^T x_1 + v_j^T (b - A_1 x_1) & & \forall j = 1, \ldots, J \\ 0 \leq \; & v_k^T (b - A_1 x_1) & & \forall k = 1, \ldots, K \\ & z \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} & & \end{aligned} \tag{BM}$$

und für x_1^*, z^* als Optimallösung von (BM) lautet das Unterproblem von Bender's Dekomposition:

$$\begin{aligned} \min \quad & v^T (b - A_1 x_1^*) + u(z^* - c_1^T x_1^*) \\ & v^T A_2 + u c_2^T = 0 \\ & u \in \mathbb{R}_+, v \in \mathbb{R}_+^m \end{aligned} \tag{BU}$$

Aufgabe G2 Zeigen Sie, dass Bender's Dekomposition und die Dantzig-Wolfe-Dekomposition im Falle linearer Programme dieselbe Schranke liefern.

Hausübungen

Abgabe am 27.06.2007

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes binäres lineares Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & A_1 x \leq b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned} \tag{0/1}$$

Zeigen Sie, dass jede 0/1-Lösung der LP-Relaxierung von (0/1) immer eine Ecke des Polyeders $P_2 := \{x \in \{0,1\}^n | A_2 x \leq b_2\}$ ist.

Aufgabe H2 (10 Punkte)

Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Breite von d cm her, die Kunden fragen für $i = 1, \ldots, m$ jeweils b_i Rollen mit (geringerer) Breite a_i nach. Das *Cutting Stock Problem* ist die Aufgabe, diese Aufträge unter Verwendung einer minimalen Anzahl von Papierrollen zu erfüllen.

Durch Auflisten aller n Möglichkeiten (sogenannte Schnittmuster), eine Rolle in kleinere Rollen benötigter Längen aufzuteilen, lässt sich das Cutting Stock Problem folgendermaßen als ganzzahliges Programm formulieren: Bezeichne $(a_{ij})_{i=1,\ldots,m}$ die Anzahl der Rollen der Breite a_i, die im j-ten Schnittmuster aus einer Ausgangsrolle geschnitten werden und $A = (a_{ij})$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{1}^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{N}_0^n \end{aligned} \tag{IP}$$

mit der LP-Relaxierung

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbb{1}^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{LP}$$

die wir (optimal) lösen wollen. Dazu arbeiten wir statt mit n nur mit $k << n$ Spalten, o.B.d.A. nur mit den ersten k. Sei $(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ die optimale Lösung des entsprechenden LP.

(i) Zeigen Sie, wie man mithilfe eines Knapsack-Problems entweder die Optimalität von $(x_1^*, \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0)$ für (LP) feststellt oder eine Spalte $j > k$ mit negativen reduzierten Kosten findet.

(ii) Wie kann man im Falle negativer reduzierter Kosten weiterverfahren, um eine Optimallösung für (LP) zu erhalten?

(iii) Seien nun folgende Daten gegeben: $d = 100$ cm,

Breite a_i in cm	Bedarf b_i
12	211
31	395
36	610
45	97

Berechnen Sie mithilfe der Dantzig-Wolfe-Dekomposition eine Lösung des relaxierten Cutting Stock Problems für diese Daten.