**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
18.04.2007

# Diskrete Optimierung II

## 1. Übung

## Wiederholung zur Linearen Optimierung

### Gruppenübungen

**Aufgabe G1** Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$
(P) \qquad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

(i) Formulieren Sie das duale Problem zu (P).

(ii) Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung von (P) ist.

**Aufgabe G2** Lösen Sie mit dem Simplex-Algorithmus:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
 & 3x_1 & - & 5x_2 & & & = & 4 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Benutzen Sie die Phase I des Simplex-Algorithmus um eine zulässige Basislösung zu finden.

**Aufgabe G3** Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Zeige:

(i) $P$ hat endlich viele Ecken.

(ii) Ein Punkt $x \in P$ ist genau dann eine Ecke von $P$, wenn $P \setminus \{x\}$ konvex ist.

(iii) Eine Kante von $P$ verbindet zwei Ecken von $P$.

(iv) Sei $F$ eine Seitenfläche von $P$. Dann entsprechen die Ecken von $F$ genau den Ecken von $P$, die in $F$ enthalten sind.

# Hausübungen

Abgabe am 25.04.2007

**Aufgabe H1** (5 Punkte)

Betrachten Sie die beiden zueinander dualen linearen Programme:

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrcl} \min & b^T y & & \\ & A^T y & \geq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Geben Sie für jede mögliche Kombination in Hinblick auf die Lösbarkeit der beiden linearen Programme („endlich“, „unbeschränkt“, „unzulässig“) ein Beispiel.

**Aufgabe H2** (7 Punkte)

Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel:

(i) Zykelt das Simplexverfahren, so tritt eine degenierte Basislösung wiederholt auf.

(ii) Jedes unlösbare Ungleichungssystem $Ax \leq b$ in $n$ Variablen enthält ein unzulässiges Teilsystem von $n+1$ Ungleichungen.

(iii) Hat das lineare Programm $\min c^T x$ s.t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das lineare Programm $\min c^T x$ s.t. $Ax = b$‘, $x \geq 0$ für alle $b$‘ beschränkt.

(iv) Besitzt ein LP keine degenerierte Basislösung, so gibt es im Simplexverfahren nach Wahl der Pivotspalte höchstens (genau) eine Variable, die die Basis verlassen kann.

(v) Wenn $Ax \leq b$, $x \geq 0$ keine Lösung hat, dann gibt es eine Lösung von $A^T y = 0$, $b^T y < 0$, $y \leq 0$.

(vi) Das LP $Ax \leq b$, $x \geq 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ kann $\binom{m+n}{m}$ zulässige Basen haben.

(vii) Wenn ein lineares Programm $(P)$ und sein duales Programm $(D)$ beide zulässig sind, dann sind alle Lösung von $(P)$ optimal.

**Aufgabe H3** (3 Punkte)

Für $1 \leq k \leq d$ ist der *Hypersimplex* $\Delta_d(k)$ definert durch

$$\Delta_d(k) := \{x \in [0,1]^d \ : \ k-1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_d \leq k\}.$$

$\Delta_d(1)$ ist ein $d$–dimensionaler Simplex.

Wieviele Ecken und Facetten haben $\Delta_3(2)$ und $\Delta_4(2)$?