

Diskrete Mathematik

9. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1

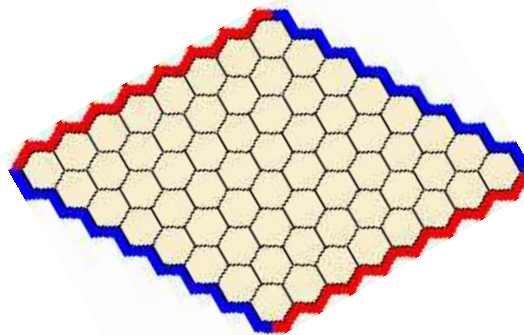
- (i) Mathematica erlaubt es, kleine Funktionen oder sogenannte Module zu schreiben, wie zum Beispiel:

```
h[x_] := Module[{i, s=0}, For[i=0, i<x, i++, s=s+i]; Print[s]];
```

Schreiben Sie eine Funktion, die einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ als Input bekommt und damit folgende Graphenkonstruktion durchführt: G wird dupliziert und $G' = (V', E')$ mit $V' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ sei die Kopie. Dann ist der zu konstruierende Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ gegeben durch $\tilde{V} := V \cup V'$ und $\tilde{E} := E \cup E' \cup \{(v_i, v'_i) \mid i = 1, \dots, n\}$.

- (ii) Im Verzeichnis `/home/kulas/Nauty/nauty22` ist das Programm `nauty` installiert, mit dem man Graphenisomorphismen finden kann. Speichern Sie diesen Pfad in Ihrer Datei `~/.bashrc` und probieren Sie das Paket `dreadnaut` aus. Eine Dokumentation von `nauty` finden Sie in `/home/kulas/Nauty/nauty22/nug.pdf`.
- (iii) Zeigen Sie mithilfe von `nauty`, dass der Kantengraph des vollständigen Graphen K_5 mit fünf Knoten und das Komplement des Petersen-Graphen isomorph sind (vgl. 6. Übung, Aufgabe H2).
- (iv) Geben Sie mindestens drei 8-reguläre Graphen mit 128 Knoten an, die paarweise nicht isomorph sind und verifizieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe von `nauty`.

Aufgabe G2 Betrachten Sie folgendes Spiel *Hex*, welches auf einem wabenartigen Spielbrett gespielt wird.



Dabei wird treten zwei Spieler gegeneinander an. Jeder besetzt abwechselnd ein Feld mit einem Spielstein der eigenen Farbe. Ziel ist es für beide Spieler, mit den eigenen Steinen ihre beiden Seiten zu verbinden, wobei jedem Spieler genau zwei gegenüberliegende Seiten gehören.

- (i) Sie dürfen das Hex-Spiel mit einem Kommilitonen Ihrer Wahl gerne einmal ausprobieren, entweder auf dem abgebildeten 8×8 -Spielfeld oder dem im Internet unter <http://games.cs.ualberta.ca/webgames/hex> zur Verfügung gestellten 11×11 -Spielfeld.
- (ii) Finden Sie heraus, wie dieses Spiel mit der in der Vorlesung vorgestellten Version zusammenhängt und folgern Sie, dass das Hex-Spiel nie mit einem Unentschieden enden kann.

Aufgabe G3

- (i) Betrachten Sie ein Tetraeder $T = A_1A_2A_3A_4$ im dreidimensionalen Raum und eine Unterteilung von T in kleine Tetraeder, so dass jede Seitenfläche der kleinen Tetraeder entweder in einer der Seitenflächen des großen Tetraeders liegt oder zugleich eine Seitenfläche eines weiteren kleinen Tetraeders ist. Markieren Sie die Ecken der kleinen Tetraeder mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, und zwar unter Beachtung der folgenden Regeln: Die Ecke A_i wird mit der Zahl i markiert, die Ecken auf der Fläche $A_iA_jA_k$ erhalten eine der Markierungen i, j oder k . Beweisen Sie, dass es ein kleines Tetraeder gibt, dessen Ecken vier verschiedenen Markierungen tragen.
- (ii) Formulieren und beweisen Sie eine dreidimensionale Version des Brouwerschen Fixpunktsatzes (über stetige Abbildungen eines Tetraeders in sich selbst).

Hausübungen

Abgabe am 21./22.06.2006

Aufgabe H1

(5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\mathcal{T}(n)$ die Menge aller aufspannenden Bäume mit n Knoten und sei $t(n)$ deren Anzahl, d.h. $t(n) = |\mathcal{T}(n)|$. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Satz von Cayley zu beweisen: $t(n) = n^{n-2}$.

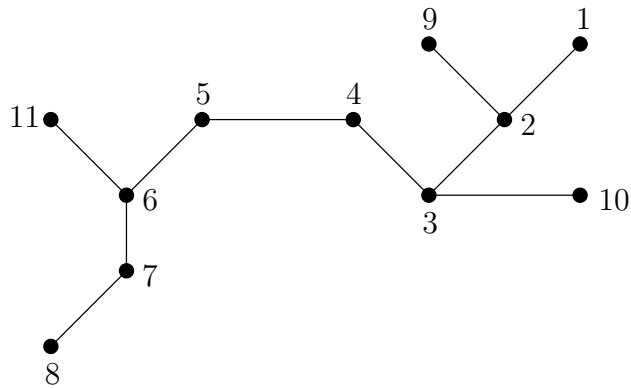
- (i) Bezeichne d_{max} den maximalen Knotengrad in einem Baum T . Zeigen Sie, dass T mindestens d_{max} Knoten mit Grad 1 besitzt.
- (ii) Sei T ein Baum, setzen Sie $T_1 := T$ und benennen Sie die Knoten von T mit $\{1, 2, \dots, n\}$. Nun sei b_1 der eindeutige Knoten mit der kleinsten Nummer unter allen Knoten mit Grad 1. Setzen Sie a_1 als den (eindeutigen) Nachbarn von b_1 . Nach Löschen der Kante $\{a_1, b_1\}$ sowie des Knotens b_1 erhalten wir den Baum T_2 (Warum ist T_2 ein Baum?) Auf diese Weise kommt man auf eine Folge von Knoten a_1, a_2, \dots, a_{n-2} . Definieren Sie nun

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}(n) &\rightarrow \{1, 2, \dots, n\}^{n-2} \\ T &\mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}). \end{aligned}$$

Die Funktion f berechnet den sogenannten Prüfer-Code (nach *H. Prüfer* (1896–1934)).

Im Beispiel werden die folgenden Zahlen erzeugt:

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, \dots, b_9) &= (1, 8, 7, 9, 2, 10, 3, 4, 5) \\ (a_1, a_2, \dots, a_9) &= (2, 7, 6, 2, 3, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$



Zeigen Sie, dass f eine Bijektion ist, indem Sie die inverse Abbildung zu f angeben.

(iii) Zeigen Sie schließlich, dass $t(n) = n^{n-2}$.

Aufgabe H2

(5 Punkte)

- (i) Zeigen Sie, dass das $n \times n$ -Hex-Spiel eine Gewinnstrategie besitzt
- (ii) Zeigen Sie, dass immer der Spieler mit dem ersten Zug das Hex-Spiel gewinnt.
- (iii) Wie sieht eine Gewinnstrategie für das Hex-Spiel auf einem Spielbrett der Größe 3×3 bzw. 5×5 aus?

Aufgabe H3

(5 Punkte)

- (i) Zeigen Sie, dass jeder Graph mit mindestens 6 Knoten den Graphen K_3 oder dessen Komplement $\overline{K_3}$ enthält.
- (ii) Zeigen Sie, dass jeder Graph mit mindestens 10 Knoten den Graphen K_4 oder $\overline{K_3}$ enthält.
- (iii) Beweisen Sie, dass die vorige Behauptung nicht für Graphen mit 8 Knoten gilt.