Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2006
19.04.2006

Diskrete Mathematik

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten folgendes Spiel: Zwei Spieler schreiben gemeinsam eine Folge von Nullen und Einsen auf. Sie beginnen mit einer leeren Zeile und ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, an das Ende der Zeile eine 0 oder eine 1 zu schreiben. Ein Spieler verliert, wenn die von ihm hinzugefügte Ziffer einen Block der Länge n erzeugt, der in der Folge schon einmal vorkommt (auch wenn die beiden Positionen überlappen).

(i) Beweisen Sie, dass dieses Spiel stets nach endlich vielen Schritten ein Ende findet.

(ii) Angenommen, n ist ungerade. Zeigen Sie, dass der zweite Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe G2 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen, in der jede nicht leere Teilmenge von M eine kleinste und eine größte Zahl enthält. Beweisen Sie, dass M endlich ist.

Aufgabe G3 Wir werden die folgende Aussage mit vollständiger Induktion beweisen: Seien $l_1, l_2, \ldots, l_n$ verschiedene Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind ($n \geq 2$). Dann haben all diese Geraden einen Punkt gemeinsam.

1. Für $n = 2$ ist die Aussage wahr, denn je zwei nichtparallele Geraden schneiden sich.
2. Angenommen, die Aussage gilt für $n = n_0$. Seien nun $n = n_0 + 1$ Geraden $l_1, \ldots, l_n$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n_0 dieser Geraden (also $l_1, \ldots, l_{n-1}$) einen gemeinsamen Punkt; nennen wir ihn mal x. Genauso haben auch die n_0 Geraden $(l_1, l_2, \ldots l_{n-2}, l_n)$ einen Punkt gemeinsam; wir nennen ihn y. Die Gerade l_1 liegt in beiden Gruppen , enthält also sowohl x als auch y. Das trifft auch auf l_{n-2} zu. Nun schneiden sich aber l_1 und l_{n-2} in einem eindeutigen Punkt , also muss $x = y$ sein. Deshalb haben alle Geraden $l_1, \ldots, l_n$ einen gemeinsamen Punkt, nämlich x.

Irgendetwas ist faul an diesem Beweis. Nur was?

Aufgabe G4 Zwei Posets $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$ heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ genau dann $x \leq y$ gilt, wenn $f(x) \preceq f(y)$.

(i) Zeichnen Sie die Hasse-Diagramme für alle nicht isomorphen Posets auf drei Elementen (d.h. für jeden Isomorphietyp eines).

(ii) Zeigen Sie, dass je zwei lineare Ordnungen auf n Elementen isomorph sind.

(iii) Finden Sie zwei nicht isomorphe lineare Ordnungen auf der Menge der natürlichen Zahlen.

(iv) Finden Sie unendlich viele nicht isomorphe lineare Ordnungen auf $\mathbb{N}$?

Hausübungen

Abgabe am 26.04.2006

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n},$$

wobei für gerades n die beiden mittleren Koeffizienten zusammenfallen.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

$\binom{n-m}{r-m}$ ist die Anzahl der r–elementigen Teilmengen einer n–elementigen Menge, die eine feste m–elementige enthalten. Zeigen Sie mithilfe dieser Interpretation, dass:

$$\binom{n-m}{r-m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n-k}{r}.$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Beweisen Sie die Gleichung

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} &= \binom{n-1}{k_1 - 1, k_2, k_3, \ldots, k_m} \\ &\quad + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, k_3, \ldots, k_m} \\ &\quad + \cdots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m - 1}\end{aligned}$$

$(n \geq 1, k_1 + \cdots + k_m = n, k_i \geq 1)$.

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Beweisen Sie den Multinomialsatz durch Induktion nach n:

Für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n,\ k_1, \ldots, k_m \geq 0} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$