Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Max Horn

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007 11.01.2007

Algorithmische Geometrie

9. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G21 Es seien P und Q volldimensionale Polyeder in $\mathbb{R}^n$ und π eine projektive Transformation, die die Facetten von P bijektiv auf die Facetten von Q abbildet. Zeigen Sie dass $\pi(P) = Q$ gilt, falls es einen inneren Punkt aus P gibt, der auf einen inneren Punkt aus Q abgebildet wird.

Geben Sie zusätzlich ein Beispiel an, das zeigt, dass die Bedingung mit dem inneren Punkt notwendig ist, um auf $\pi(P) = Q$ zu schließen.

Aufgabe G22 Zeigen Sie: Falls jede $(n+2)$-elementige Teilmenge von S nicht auf einer gemeinsamen Sphäre liegt, dann ist das geliftete Polyeder einfach, und damit ist auch jede Voronoi-Region einfach.

Hausübungen

Aufgabe H16 Geben Sie für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ eine m-elementige Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ (in allgemeiner Lage) an, für die der Wellenfront-Algorithmus alle Punktereignisse abarbeitet, bevor danach alle Kreisereignisse behandelt werden.

Aufgabe H17 Nach Satz 6.12 entsteht das Voronoi-Diagramm $\mathrm{VD}(S)$ durch vertikale Projektion des Polyeders $\mathrm{VP}(S) = \bigcap_{s \in S} T(s)^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auf die ersten n Koordinaten.

Mit π bezeichnen wir die projektive Transformation von $\mathbb{P}_{n+1}\mathbb{R}$, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert ist.

Zeigen Sie, dass $\pi(\mathrm{VP}(S))$ ein Polytop ist (überlegen Sie sich dazu auch, warum dieser Term überhaupt sinnvoll definiert ist). Hinweis: Verwenden Sie Lemma 6.11, um einen Ball anzugeben, der $\pi(\mathrm{VP}(S))$ enthält.