Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Max Horn

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/2007 9.11.2006

Algorithmische Geometrie

2. Übung

Gruppenübungen

Definition *Eine Punktmenge $M \subset \mathbb{P}^n$ heißt* kollinear*, falls es eine projektive Gerade gibt, die sämtliche Punkte aus M enthält. Eine Quadrupel $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ von Punkten in $\mathbb{P}^2$ heißt* Viereck*, falls keine drei seiner Punkte kollinear sind.*

Aufgabe G4 Zeige: Zu je zwei Vierecken $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ und $(b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)})$ existiert eine projektive Transformation π von $\mathbb{P}^2$ mit $\pi(a^{(i)}) = b^{(i)}$, für $1 \leq i \leq 4$.

Aufgabe G5 (Geradheitskriterium von Gale.) Sei V die Eckenmenge eines zyklischen Polytops mit der induzierten Ordnung $\prec$ bezüglich der Momentenkurve (d.h. $x(\tau_1) \prec x(\tau_2)$ genau dann, wenn $\tau_1 < \tau_2$). Sei $F = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ein n-Tupel von Ecken von P, wobei $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_n$. Dann ist $\operatorname{conv} F$ genau dann eine Facette von P, wenn für je zwei Ecken $u, v \in V \setminus F$ die Anzahl der Knoten $v_i \in F$ mit $u \prec v_i \prec v$ gerade ist.

Hausübungen

Aufgabe H1 Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

1. Zeigen Sie, dass die projektive Ebene $\mathbb{P}^2_K$ genau $N := q^2 + q + 1$ Punkte und ebenso viele Geraden enthält.
2. Seien die Punkte mit $p_1, \dots, p_N$ und die Geraden mit $\ell_1, \dots, \ell_N$ bezeichnet, und sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die durch
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p_i \text{ auf } \ell_j \text{ liegt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
definierte *Inzidenzmatrix*. Berechnen Sie den Betrag der Determinante von A. [Hinweis: Untersuchen Sie die Matrix $A \cdot A^T$.]

Aufgabe H2 Je n verschiedene Punkte auf der Momentenkurve
$$\mu_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\,,\ \tau \mapsto (\tau, \tau^2, \dots, \tau^n)^T\,.$$
sind affin unabhängig.