Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Max Horn

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/2007 2.11.2006

Algorithmische Geometrie

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1 Sei $P(V)$ ein projektiver Raum. Für jede nichtleere Teilmenge S von V ist $T = \rho(S \setminus \{0\})$ eine Teilmenge von $P(V)$ und für den von S erzeugten Unterraum $\langle S \rangle$ ist $P(\langle S \rangle)$ ein projektiver Unterraum, der mit $\langle T \rangle$ bezeichnet wird. Zeigen Sie für zwei projektive Unterräume U und W von $P(V)$ die Dimensionsformel

$$\dim U + \dim W \;=\; \dim(\langle U \cup W \rangle) + \dim(U \cap W)\,.$$

Aufgabe G2

1. Jede von der Identität verschiedene projektive Transformation auf der reellen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ hat höchstens zwei Fixpunkte.
2. Jede von der Identität verschiedene projektive Transformation auf der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ hat zwei verschiedene Fixpunkte oder einen doppelten Fixpunkt.

Aufgabe G3 Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

1. Zeigen Sie, dass die projektive Ebene $\mathbb{P}^2_K$ genau $N := q^2 + q + 1$ Punkte und ebenso viele Geraden enthält.
2. Seien die Punkte mit $p_1, \dots, p_N$ und die Geraden mit $\ell_1, \dots, \ell_N$ bezeichnet, und sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die durch
$$a_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } p_i \text{ auf } \ell_j \text{ liegt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
definierte *Inzidenzmatrix*. Berechnen Sie den Betrag der Determinante von A. [Hinweis: Untersuchen Sie die Matrix $A \cdot A^T$.]

Definition *Eine Punktmenge $M \subset \mathbb{P}^n$ heißt* kollinear*, falls es eine projektive Gerade gibt, die sämtliche Punkte aus M enthält. Eine Quadrupel $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ von Punkten in $\mathbb{P}^2$ heißt* Viereck*, falls keine drei seiner Punkte kollinear sind.*

Aufgabe G4 Zeige: Zu je zwei Vierecken $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$ und $(b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)})$ existiert eine projektive Transformation π von $\mathbb{P}^2$ mit $\pi(a^{(i)}) = b^{(i)}$, für $1 \leq i \leq 4$.