

Inhalt

1	Einführung und Überblick	1
1.1	Lineare algorithmische Geometrie	1
1.2	Nichtlineare algorithmische Geometrie	4
1.3	Anwendungen	6
1.4	Anhänge	7
I	Lineare algorithmische Geometrie	
2	Geometrische Grundlagen	11
2.1	Projektive Räume	11
2.2	Projektive Transformationen	14
2.3	Konvexität	16
2.4	Aufgaben	18
2.5	Anmerkungen	19
3	Polytope und Polyeder	21
3.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	21
3.2	Der Seitenverband eines Polytops	27
3.3	Polarität und Dualität	30
3.4	Polyeder	34
3.5	Die Kombinatorik von Polytopen	37
3.6	Untersuchungen mit <code>polymake</code>	43
3.7	Aufgaben	45
3.8	Anmerkungen	46
4	Lineare Optimierung	47
4.1	Problemstellung	47
4.2	Dualität	49
4.3	Der Simplex-Algorithmus	53
4.4	Bestimmen einer Startecke	60
4.5	Untersuchungen mit <code>polymake</code>	62
4.6	Aufgaben	63
4.7	Anmerkungen	64

viii	Inhalt
5	Berechnung konvexer Hüllen 67
5.1	Vorüberlegungen 67
5.2	Die Methode der doppelten Beschreibung 69
5.3	Ebene konvexe Hüllen 75
5.4	Untersuchungen mit <code>polymake</code> 79
5.5	Aufgaben 80
5.6	Anmerkungen 81
6	Voronoi-Diagramme 83
6.1	Voronoi-Regionen 83
6.2	Polyedrische Komplexe 85
6.3	Voronoi-Diagramme und konvexe Hüllen 87
6.4	Der Wellenfront-Algorithmus 90
6.5	Bestimmung des nächsten Nachbarn 100
6.6	Aufgaben 101
6.7	Anmerkungen 102
7	Delone-Triangulierungen 103
7.1	Dualisierung von Voronoi-Diagrammen 103
7.2	Die Delone-Zerlegung 107
7.3	Volumenberechnung 109
7.4	Optimalität von Delone-Triangulierungen 110
7.5	Planare Delone-Triangulierungen 114
7.6	Untersuchungen mit <code>polymake</code> 119
7.7	Aufgaben 122
7.8	Anmerkungen 122
II	Nichtlineare algorithmische Geometrie
8	Algebraische und geometrische Grundlagen 125
8.1	Motivation 125
8.2	Univariate Polynome 128
8.3	Resultanten 130
8.4	Ebene affine algebraische Kurven 132
8.5	Projektive Kurven 134
8.6	Der Satz von Bézout 136
8.7	Algebraische Kurven mit <code>Maple</code> 140
8.8	Aufgaben 142
8.9	Anmerkungen 143
9	Gröbnerbasen und der Buchberger-Algorithmus 145
9.1	Ideale und der univariate Fall 145
9.2	Monomordnungen 149

Inhalt	ix
9.3 Gröbnerbasen und der Hilbertsche Basissatz	152
9.4 Der Algorithmus von Buchberger	157
9.5 Binomiale Ideale	160
9.6 Ein elementargeometrischer Beweis mit Gröbnerbasen	161
9.7 Aufgaben	163
9.8 Anmerkungen	164
10 Lösen polynomialer Gleichungssysteme mit Gröbnerbasen	167
10.1 Gröbnerbasen mit Maple und Singular	167
10.2 Elimination von Unbestimmten	169
10.3 Fortsetzung partieller Lösungen	172
10.4 Hilberts Nullstellensatz	174
10.5 Lösen polynomialer Gleichungen	178
10.6 Gröbnerbasen und ganzzahlige lineare Programme	182
10.7 Aufgaben	187
10.8 Anmerkungen	188
III Anwendungen	
11 Kurvenrekonstruktion	191
11.1 Vorüberlegungen	192
11.2 Die mediale Achse und lokale Details	192
11.3 Muster und polygonale Rekonstruktion	195
11.4 Der Algorithmus NN-Crust	198
11.5 Kurvenrekonstruktion mit polymake	201
11.6 Aufgaben	203
11.7 Anmerkungen	203
12 Plücker-Koordinaten und Geraden im Raum	205
12.1 Plücker-Koordinaten	205
12.2 Äußere Multiplikation und äußere Algebra	207
12.3 Dualität	211
12.4 Rechnen mit Plücker-Koordinaten	216
12.5 Geraden in \mathbb{R}^3	217
12.6 Aufgaben	219
12.7 Anmerkungen	219
13 Anwendungen der nichtlinearen algorithmischen Geometrie	221
13.1 Voronoi-Diagramme für Geradensegmente in der Ebene	221
13.2 Kinematische Probleme und Bewegungsplanungen	224
13.3 Das Global Positioning System GPS	232
13.4 Anmerkungen	234

x	Inhalt
IV	Anhänge
A	Algebraische Strukturen 237
A.1	Gruppen, Ringe, Körper 237
A.2	Polynomringe 238
B	Trennungssätze 241
C	Algorithmen und Komplexität 245
C.1	Komplexität von Algorithmen 245
C.2	Die Komplexitätsklassen P und NP 248
D	Software 251
D.1	polymake 251
D.2	Maple 251
D.3	Singular 252
D.4	CGAL 252
E	Notation 253
	Literaturverzeichnis 255
	Index 261